Solution de la Série N^o6 : Matrices, déterminants et systèmes

Exercice 1

Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Trouver l'endomorphisme φ associé à A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer le déterminant de A.
3. Déterminer la matrice inverse A^{-1}. φ est-il bijectif ?
4. Déterminer φ^{-1} relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Solution : Soit $\mathcal{B} = \{e_1; e_2; e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = A$ où $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est l'endomorphisme dont A est une matrice.

1. L'endomorphisme φ associé à A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est définie par :

$$\begin{cases} \varphi(e_1) & = 2e_1 + 2e_2 + 1e_3, \\ \varphi(e_2) & = -2e_1 + 2e_2 + 1e_3, \\ \varphi(e_3) & = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3 \end{cases}$$

2. Le déterminant de A est $\det(A)$ donné par

$$\begin{aligned} \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(4-2) + 2(4-2) + 2(2-2) \\ &= 4 + 4 + 0 \end{aligned}$$

d'où $\det(A) = 8$.

3. La matrice inverse A^{-1} : d'après la question 2, on a $\det(A) = 8$ alors A est inversible et donc φ est-il bijectif.
Calculons La matrice inverse A^{-1}, en effet

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{Com}(A))^T = \frac{1}{8}(\mathrm{Com}(A))^T$$

il reste à calculer la comatrice $\Gamma = \mathrm{Com}(A)$ de A, en effet

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,1} &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \Gamma_{1,2} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad \Gamma_{1,3} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ \Gamma_{2,1} &= -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6, \quad \Gamma_{2,2} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \Gamma_{2,3} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \\ \Gamma_{3,1} &= \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -8, \quad \Gamma_{3,2} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Gamma_{3,3} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \end{aligned}$$

donc $\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & 4 \\ -8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$; donc $\Gamma^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -8 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$; d'où

$$A^{-1} = \frac{1}{8}(\text{Com}(A))^T = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -8 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérification : on peut vérifier facilement que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

4. Déterminons φ^{-1} relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$: on a

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = A \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = A^{-1}$$

alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -1 \\ & & \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ & & \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ par

$$\begin{cases} \varphi^{-1}(e_1) & = \frac{1}{4}e_1 - \frac{1}{4}e_2, \\ \varphi^{-1}(e_2) & = \frac{3}{4}e_1 + \frac{1}{4}e_2 + \frac{1}{2}e_3, \\ \varphi^{-1}(e_3) & = -e_1 + e_3 \end{cases}$$

□

Exercice 2

Soit $(\mathcal{S})$ le système différentiel linéaire sans second membre

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x'(t) & = & x(t) - \frac{1}{2}\, y(t) \\ y'(t) & = & 2\, x(t) - y(t) \end{cases}$$

où x et y sont des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

1. Écrire $(\mathcal{S})$ sous la forme matricielle $X'(t) = BX(t)$ où B est une matrice à déterminer. La matrice B est-elle inversible ?
2. Calculer B^2 et B^3. Que peut-on déduire ?
3. Calculer la matrice $A = \exp(tB)$ en fonction de t.
4. En déduire les expressions des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ lorsque $x(0) = 1$ et $y(0) = -1$.

Solution : Considérons le système différentiel linéaire sans second membre $(\mathcal{S})$ (homogène) donné par

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x'(t) & = & x(t) - \frac{1}{2}\, y(t) \\ y'(t) & = & 2\, x(t) - y(t) \end{cases}$$

où x et y sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit $t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

1. La forme matricielle équivalente du système $(\mathcal{S})$:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

d'où la forme matricielle $X'(t) = BX(t)$ où $B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

La matrice B soit inversible si et seulement si $\det(B) \neq 0$, or $\det(B) = 1 - 1 = 0$; donc B n'est pas inversible.

2. Calculons les puissance B^2 et B^3 :

$$\begin{aligned} B^2 &= B \times B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 - \frac{1}{2} \times 2 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ 2 - 2 & -\frac{1}{2} \times 2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B^3 &= B \times B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit que la matrice B est nilpotente d'indice de nilpotence $p = 2$ car B^k est la matrice nulle pour tout $k \geq 2$.

3. Calculons la matrice $A = \exp(tB)$ en fonction de t : pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $t\,B = \begin{pmatrix} t & -\frac{1}{2}\,t \\ 2\,t & -t \end{pmatrix}$, alors

$$\exp(tB) = I_3 + t\,B + + \sum_{k \geq 2} \frac{t^k}{k!} B^k == I_3 + t\,B$$

car $\sum_{k \geq 3} \frac{t^k}{k!} N^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice nulle car $B^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour tout $k \geq 2$,
finalement, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on obtient

$$A = \exp(tB) = \begin{pmatrix} 1 + t & -\frac{1}{2}\,t \\ 2\,t & 1 - t \end{pmatrix}.$$

4. Le système $(\mathcal{S})$ est équivalent au système $X'(t) = B\,X(t)$ alors la solution $X(t)$ s'écrit formelement $X(t) = \exp(tB)\,X(0)$ où $X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$.

On déduit donc la solution

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + t & -\frac{1}{2}\,t \\ 2\,t & 1 - t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$

soit la solution générale donnée par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) &=& x(0)(1+t) - \frac{1}{2} y(0)\,t \\ \\ y(t) &=& 2x(0)\,t + y(0)(1-t) \end{array} \right.$$

en particulier, pour $x(0) = 1$ et $y(0) = -1$, il vient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) &=& 1 + t + \frac{1}{2}\,t \\ y(t) &=& 2\,t - (1-t) \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) &=& \frac{3}{2}\,t + 1 \\ y(t) &=& 3\,t - 1 \end{array} \right.$$

□

Exercice 3

Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer l'expression de φ
2. Calculer A^2 et A^3, puis déterminer φ^2 et φ^3.
3. Calculer le déterminant de A, puis déterminer la matrice A^{-1}.

Solution : considérons la matrice A donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminons l'expression de φ : soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

donc $\varphi\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est l'endomorphisme défini par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \varphi(e_1) & = & 8\,e_1 - 2\,e_2 + 4\,e_3 \\ \varphi(e_2) & = & -e_1 + 3\,e_2 - e_3 \\ \varphi(e_3) & = & -5\,e_1 + e_2 - e_3 \end{array} \right.$$

2. Calculons A^2 et A^3 :

$$\begin{array}{rcl} A^2 & = & A \times A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & -6 & -36 \\ -18 & 10 & 12 \\ 30 & -6 & -20 \end{pmatrix} \\ A^3 & = & A \times A^2 = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 & -6 & -36 \\ -18 & 10 & 12 \\ 30 & -6 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 236 & -28 & -200 \\ -116 & 36 & 88 \\ 172 & -28 & -136 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Déterminer φ^2 et φ^3 : en effet, $\varphi^2\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est l'endomorphisme défini par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \varphi^2(e_1) & = & 46\,e_1 - 18\,e_2 + 30\,e_3 \\ \varphi^2(e_2) & = & -6\,e_1 + 10\,e_2 - 6\ e_3 \\ \varphi^2(e_3) & = & -36\,e_1 + 12\ e_2 - 20\ e_3 \end{array} \right.$$

et $\varphi^3\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est l'endomorphisme défini par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \varphi^3(e_1) & = & 236\,e_1 - 116\,e_2 + 172\,e_3 \\ \varphi^3(e_2) & = & -28\,e_1 + 36\,e_2 - 28\ e_3 \\ \varphi^3(e_3) & = & -200\,e_1 + 88\ e_2 - 136\ e_3 \end{array} \right.$$

3. Calculons le déterminant de A et la matrice A^{-1} : en effet, La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant $\det(A)$ est différent de 0.
Alors, il suffit de calculer son déterminant : on peut alors développer le calcul du déterminant de A suivant une ligne ou une colonne.
Le développement suivant une ligne i :

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j} det(A_{i,j}).$$

Le terme $(-1)^{i+j}det(A_{i,j})$ est appelé le cofacteur du terme $a_{i,j}$ et le terme $det(A_{i,j})$ est appelé le mineur du terme $a_{i,j}$. Cette méthode porte le nom de développement suivant une ligne.
Le développement suivant une colonne j :

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}det(A_{i,j}).$$

Le terme $(-1)^{i+j}det(A_{i,j})$ est appelé le cofacteur du terme $a_{i,j}$ et le terme $det(A_{i,j})$ est appelé le mineur du terme $a_{i,j}$. Cette méthode porte le nom de développement suivant une colonne.
Avec $n = 3$, aucun chiffre 0 ne figure sur les lignes et sur les colonne alors on choisit n'importe laquelle des deux méthodes ligne ou colonne. Je prend par exemple La colonne numéro 3 veut dire que $j = 3$ dans la formule

$$\begin{aligned}
det(A) &= \sum_{i=1}^{3} a_{i,3}(-1)^{i+3}det(A_{i,3}) \\
&= a_{1,3}(-1)^{1+3}det(A_{1,3}) + a_{2,3}(-1)^{2+3}det(A_{2,3}) + a_{3,3}(-1)^{3+3}det(A_{3,3}) \\
&= a_{1,3}\,det(A_{1,3}) - a_{2,3}\,det(A_{2,3}) + a_{3,3}\,det(A_{3,3})
\end{aligned}$$

où $a_{13} = -5$, $a_{23} = 1$ et $a_{33} = -1$; donc

$$\begin{aligned}
\det(A) = \begin{vmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} &= -5\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\
&= -5(2-12) - (-8+4) - (24-2) \\
&= 50 + 4 - 22
\end{aligned}$$

donc $\det(A) = 32 \neq 0$; d'où A est inversible et que φ est bijectif.
L'inverse A^{-1} de la matrice A sera calculé par la formule

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{det}(A)}\,\text{Com}(A^T) = \frac{1}{\text{det}(A)}\,(\text{Com}(A))^T$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice A n'est pas symétrique car $A^T \neq A$. Calculons la matrice $\Gamma = \text{Com}(A^T)$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11} &= +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2; \quad \Gamma_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 4 \\
\Gamma_{13} &= +\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 14; \quad \Gamma_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \\
\Gamma_{22} &= +\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 12; \quad \Gamma_{23} = -\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \\
\Gamma_{31} &= +\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10; \quad \Gamma_{32} = -\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \\
\Gamma_{33} &= +\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 22
\end{aligned}$$

D'où

$$A^{-1} = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 14 \\ 2 & 12 & 2 \\ -10 & 4 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{7}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{8} & \frac{1}{16} \\ -\frac{5}{16} & \frac{1}{8} & \frac{11}{16} \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1})$$

est la matrice de φ^{-1}.

$\square$

Exercice 4

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et A_α la matrice carrée donnée par $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 2 & \alpha & 1 \\ -4 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$.

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{I}$ des valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est inversible.
2. Calculer la matrice A_α^{-1} pour α appartenant à $\mathcal{I}$.
3. En déduire, lorsque $\alpha \in \mathcal{I}$, la solution du système $(\mathcal{P})$: $\begin{cases} \alpha\, x + 0y - z = -1 \\ 2x + \alpha\, y + z = 1 \\ -4x - y + \alpha\, z = 1 \end{cases}$

Solution : Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, considérons la matrice carrée A_α donnée par $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 2 & \alpha & 1 \\ -4 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$.

1. L'ensemble $\mathcal{I}$ des valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est inversible est

$$\mathcal{I} = \{\alpha \in \mathbb{R} \,:\, \det(\mathrm{A}_\alpha) \neq 0\}$$

ceci puisqu'une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.
Or par calcul il vient

$$\det(A_\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 2 & \alpha & 1 \\ -4 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 3\alpha + 2 = (\alpha - 1)^2(\alpha + 2)$$

alors $\det(A_\alpha) = 0$ entraine $(\alpha - 1)^2(\alpha + 2) = 0$; donc $\alpha = -1$ où bien $\alpha = -2$; ce qui montre que

$$\mathcal{I} = \{\alpha \in \mathbb{R} \,:\, \alpha \neq 1 \text{ et } \alpha = -2\} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$$

où bien $\mathcal{I} =]-\infty, -2[\cup]-2, 1[\cup]1, +\infty[$. D'où A_α est inversible si et seulement si $\alpha \in \mathcal{I}$.

2. Soit $\alpha \in \mathcal{I}$, calculons la matrice A_α^{-1} inverse de la matrice a_α. Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$, on a

$$\det(A_\alpha) = (\alpha - 1)^2(\alpha + 2) \neq 0$$

Soit $B = A_\alpha^T = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -4 \\ 0 & \alpha & -1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ la transposée de A_α, alors calculons $\Gamma = \mathrm{B}$ la comatrice de B. On sait que la matrice Γ est générée par les coefficients $\Gamma_{ij} = (-1)^{i+j}\det(B_{ij})$ où B_{ij} est la sous-matrice de B en enlevant la i^{ieme} ligne et la j^{ieme} colonne de la matrice B :

$$\Gamma_{11} = \alpha^2 + 1,\ \Gamma_{12} = 1,\ \Gamma_{13} = \alpha,\ \Gamma_{21} = -2(\alpha + 2), \Gamma_{22} = \alpha^2 - 4,\ \Gamma_{23} = -(\alpha + 2),$$
$$\Gamma_{31} = 4\alpha - 2,\ \Gamma_{32} = \alpha,\ \Gamma_{33} = \alpha^2$$

donc $A_\alpha^{-1} = \dfrac{1}{\det(A_\alpha)}\,\Gamma$; d'où

$$A_\alpha^{-1} = \frac{1}{(\alpha - 1)^2(\alpha + 2)} \begin{pmatrix} \alpha^2 + 1 & 1 & \alpha \\ -2(\alpha + 2) & \alpha^2 - 4 & -(\alpha + 2) \\ 4\alpha - 2 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

3. Soit $\alpha \in \mathcal{I}$, le système s'écrit sous la forme équivalente suivante

$$(\mathcal{P}) : \left\{ \begin{array}{c} \alpha\, x + 0y - z = -1 \\ 2x + \alpha\, y + z = 1 \\ -4x - y + \alpha\, z = 1 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 2 & \alpha & 1 \\ -4 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alors on obtient la forme matricielle $A_\alpha\, X = b$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matrice A_α étant inversible, alors $X = A_\alpha^{-1}\, b$, soit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)} \begin{pmatrix} \alpha^2+1 & 1 & \alpha \\ -2(\alpha+2) & \alpha^2-4 & -(\alpha+2) \\ 4\alpha-2 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)} \begin{pmatrix} -\alpha(\alpha-1) \\ (\alpha-1)(\alpha+2) \\ (\alpha-1)(\alpha-2) \end{pmatrix}$$

d'où le résultat suivant

$$\left\{ \begin{array}{ccl} x & = & \dfrac{-\alpha(\alpha-1)}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \dfrac{-\alpha}{(\alpha-1)(\alpha+2)} \\ y & = & \dfrac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \dfrac{1}{\alpha-1}, \\ z & = & \dfrac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \dfrac{(\alpha-2)}{(\alpha-1)(\alpha+2)} \end{array} \right.$$

$\square$

Exercice 5

Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

On appelle la **trace** de A le nombre noté "$\mathrm{tr}(A)$" défini par $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$.
Montrer que le polynôme caractéristique $P_A(x)$ de A s'écrit sous la forme

$$P_A(x) = x^2 - \mathrm{tr}(A)x + \det(A)$$

Solution : On appelle la **trace** d'une matrice A de taille $(n \times n)$, le nombre noté "$\mathrm{tr}(A)$", défini par

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

pour $n = 2$, on a $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$.
On appelle le polynôme caractéristique de A, noté $P_A(x)$, le polynôme d'invariant x donnée par

$$P_A(x) = P(x) = \det(A - x\, I_n)$$

où I_n est la matrice identité de taille $(n \times n)$.
Montrons que le polynôme caractéristique $P_A(x)$ d'une matrice A de taille (2×2) s'écrit sous la forme

$$P_A(x) = x^2 - \mathrm{tr}(A)x + \det(A)$$

en effet, soit a une matrice de taille (2×2), alors

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

donc

$$A - x\,I_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - x & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - x \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} P_A(x) = P(x) &= \det(A - x\,I_2) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - x \end{vmatrix} = (a_{11} - x)(a_{22} - x) - a_{12}a_{21} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{11}\,x - a_{22}\,x + x^2 - a_{12}\,a_{21} \\ &= x^2 - (a_{11} + a_{22})\,x + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \end{aligned}$$

or on a $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$ et

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

d'où $P_A(x) = x^2 - \mathrm{tr}(A)x + \det(A)$. □

Exercice 6

On donne une matrice A carrée d'ordre n, A, dont le coefficients appartiennent à un corps commutatif $\mathbb{K}$; on note P le polynôme caractéristique de A.

1. Montrer que A est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$
2. Montrer que le polynôme caractéristique R de A^{-1} s'écrit sous la forme suivante :

$$R(x) = \frac{(-1)^n x^n}{P(0)} P\left(\frac{1}{x}\right).$$

Solution : Considérons une matrice A carrée d'ordre n, dont les coefficients appartiennent à un corps commutatif $\mathbb{K}$; on note P le polynôme caractéristique de A.

1. Montrons que A est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$: en effet, le polynôme caractéristique de A est donné par

$$P_A(x) = P(x) = \det(A - x\,I_n)$$

$\Rightarrow\rfloor$ si A était inversible, alors $\det(A) \neq 0$, donc $P(0) = \det(A - 0\,I_n) = \det(A) \neq 0$.
$\Leftarrow\rfloor$ si $P(0) \neq 0$, alors si $\det(A) = \det(A - 0\,I_n) = P(0) \neq 0$; donc A est inversible.

2. Montrons que le polynôme caractéristique R de A^{-1} s'écrit sous la forme suivante :

$$R(x) = \frac{(-1)^n x^n}{P(0)} P\left(\frac{1}{x}\right).$$

En effet, pour $x \neq 0$ on a : $A(A^{-1} - x\,I_n) = I_n - x\,A = -x\left(A - \frac{1}{x}I_n\right)$, alors

$$\det(A(A^{-1} - x\,I_n)) = \det(A)\det(A^{-1} - x\,I_n) = P(0)R(x)$$

où $R(x) = \det(A^{-1} - x\,I_n)$ est le polynôme caractéristique de A^{-1} ; donc

$$P(0)R(x) = \det(A(A^{-1} - x\,I_n)) = \det\left(-x\left(A - \frac{1}{x}I_n\right)\right) = (-x)^n \det\left(A - \frac{1}{x}I_n\right)$$

car si M est une matrice de taille $(n \times n)$ alors $\det(\lambda\,M) = \lambda^n \det(M)$;
comme $\det\left(A - \frac{1}{x}I_n\right) = P\left(\frac{1}{x}\right)$, d'où $P(0)R(x) = (-x)^n\,P\left(\frac{1}{x}\right)$ soit

$$R(x) = \frac{(-1)^n x^n}{P(0)} P\left(\frac{1}{x}\right).$$

$\square$

Exercice 7
Soit M la matrice donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé à A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer l'expression de φ
2. Calculer A^2 et A^3, puis déterminer φ^2 et φ^3.
3. Calculer le déterminant de A, puis déterminer la matrice A^{-1}.

Solution : Considérosn la matrice M donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé à A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminons l'expression de φ : soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on a

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\varphi\ :\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ est l'endomorphisme défini par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi(e_1) & = & e_1 - e_2 + 2\,e_3 + e_4 \\ \varphi(e_2) & = & 4\,e_2 + e_3 + 2\,e_3 \\ \varphi(e_3) & = & e_2 + 2\,e_3 + e_4 \\ \varphi(e_4) & = & -2\,e_2 - e_3 \end{array} \right.$$

2. Calculons A^2 et A^3 :

$$\begin{array}{rcl} M^2 & = & M \times M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 13 & 4 & -9 \\ 4 & 4 & 4 & -4 \\ 1 & 9 & 4 & -5 \end{pmatrix} \\ M^3 & = & M \times M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 13 & 4 & -9 \\ 4 & 4 & 4 & -4 \\ 1 & 9 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -19 & 38 & 12 & -30 \\ 4 & 12 & 8 & -12 \\ -5 & 30 & 12 & -22 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Déterminer φ^2 et φ^3 : en effet, $\varphi^2\ :\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ est l'endomorphisme défini par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi^2(e_1) & = & e_1 - 5\,e_2 + 4\,e_3 + e_4 \\ \varphi^2(e_2) & = & 13\,e_2 + 4\,e_3 + 9\,e_4 \\ \varphi^2(e_3) & = & 4\,e_2 + 4\,e_3 + 4\,e_4 \\ \varphi^2(e_4) & = & -9\,e_2 - 4\,e_3 - 5\,e_4 \end{array} \right.$$

et $\varphi^3\ :\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ est l'endomorphisme défini par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi^3(e_1) & = & e_1 - 19\,e_2 + 4\,e_3 - 5\,e_4 \\ \varphi^3(e_2) & = & 38\,e_2 + 12\,e_3 + 30\,e_4 \\ \varphi^3(e_3) & = & 12\,e_2 + 8\,e_3 + 12\,e_4 \\ \varphi^3(e_4) & = & -30\,e_2 - 12\,e_3 - 22\,e_4 \end{array} \right.$$

3. Calculons le déterminant de M et la matrice M^{-1} : en effet, La matrice M est inversible si et seulement si son déterminant $\det(M)$ est différent de 0.
Alors, il suffit de calculer son déterminant : on peut alors développer le calcul du déterminant de A suivant une ligne ou une colonne.
Le développement suivant une ligne i :

$$det(M) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j} det(M_{i,j}).$$

Le terme $(-1)^{i+j} det(M_{i,j})$ est appelé le cofacteur du terme $a_{i,j}$ et le terme $det(M_{i,j})$ est appelé le mineur du terme $a_{i,j}$. Cette méthode porte le nom de développement suivant une ligne.
Le développement suivant une colonne j :

$$det(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j} det(M_{i,j}).$$

Le terme $(-1)^{i+j} det(M_{i,j})$ est appelé le cofacteur du terme $a_{i,j}$ et le terme $det(M_{i,j})$ est appelé le mineur du terme $a_{i,j}$. Cette méthode porte le nom de développement suivant une colonne.
Avec $n = 4$, les chiffres 0 figurent plus sur la ligne 1 alors on choisit la ligne $i = 1$ dans la formule du calcul du déterminant selon les lignes

$$\begin{aligned} det(M) &= \sum_{i=1}^{4} a_{1,j}(-1)^{1+j} det(M_{1,j}) \\ &= a_{1,1}(-1)^{1+1} det(M_{1,1}) + a_{1,2}(-1)^{1+2} det(M_{1,2}) \\ &\quad + a_{1,3}(-1)^{1+3} det(M_{1,3}) + a_{1,4}(-1)^{1+4} det(M_{1,4}) \\ &= a_{1,1}\, det(M_{1,1}) - a_{1,2}\, det(M_{1,2}) + a_{1,3}\, det(M_{1,3}) - a_{1,4}\, det(M_{1,4}) \end{aligned}$$

où $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$ et $a_{1,4} = 0$; donc

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

encore pour ce déterminant le coefficient 0 se trouve commun entre la ligne 3 et la colonne 3 ; on choisit la ligne 3, alors on a

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1+4) - (-4+8) = 8$$

donc $\det(M) = 8 \neq 0$; d'où M est inversible et que φ est bijectif.
L'inverse M^{-1} de la matrice M sera calculé par la formule

$$M^{-1} = \frac{1}{\text{det}(M)}\, \text{Com}(M^T) = \frac{1}{\text{det}(M)}\, (\text{Com}(M))^T$$

$$M^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice M n'est pas symétrique car $M^T \neq M$. Calculons la matrice $\Gamma = \text{Com}(M^T)$ où

$$\Gamma_{ij} = (-1)^{i+j} det(M^T_{i,j})$$

où $M^T_{i,j}$ est la matrice mineure de M^T en l'enlevant la ligne i et la colonne j.

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11} &= +\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2; \quad \Gamma_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \Gamma_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\
\Gamma_{14} &= -\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad \Gamma_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2; \quad \Gamma_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \\
\Gamma_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2; \quad \Gamma_{24} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3; \quad \Gamma_{31} = +\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -12 \\
\Gamma_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2; \quad \Gamma_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 4; \quad \Gamma_{34} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \\
\Gamma_{41} &= -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8; \quad \Gamma_{42} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad \Gamma_{43} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \\
\Gamma_{44} &= +\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7
\end{aligned}$$

D'où

$$M^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \\ -12 & -2 & 4 & 2 \\ 8 & -3 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{7}{8} \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1})$$

est la matrice de φ^{-1} ; soit $\varphi^{-1} \ : \ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ est l'endomorphisme défini par

$$\begin{cases} \varphi^{-1}(e_1) &= \frac{1}{4}\, e_1 - \frac{1}{4}\, e_2 - \frac{3}{2}\, e_3 + e_4 \\ \varphi^{-1}(e_2) &= \frac{1}{8}\, e_2 - \frac{1}{4}\, e_3 - \frac{3}{8}\, e_3 \\ \varphi^{-1}(e_3) &= -\frac{1}{4}\, e_2 + \frac{1}{2}\, e_3 - \frac{1}{4}\, e_4 \\ \varphi^{-1}(e_4) &= \frac{3}{8}\, e_2 + \frac{1}{4}\, e_3 + \frac{7}{8}\, e_4 \end{cases}$$

$\square$

Exercice 8

Soit $(\mathcal{S})$ le système différentiel linéaire sans second membre

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) &=& \alpha\, x(t) + 2\, y(t) + z(t) \\ y'(t) &=& \alpha\, y(t) + 3z(t) \\ z'(t) &=& \alpha\, z(t) \end{array} \right.$$

où x, y et z sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit $t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

1. Écrire $(\mathcal{S})$ sous la forme matricielle $X'(t) = BX(t)$ où B est une matrice à déterminer. La matrice B est-elle inversible ? Qu'appelle-t-on ce type de matrice ?
2. Montrer que la matrice B s'écrit sous la forme $D + N$ où D est une matrice diagonale à déterminer et N est une matrice nilpotente à déterminer.
   *Déterminer l'indice de nilpotence de N.
3. En utilisant l'écriture $B = D + N$, montrer que $\exp(tB) = \exp(tD)\left(I_3 + tN + \frac{1}{2}t^2N^2\right)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ où I_3 est la matrice identité de taille (3×3).
4. Calculer les matrices $P = \exp(tD)$ et $Q = I_3 + tN + \frac{1}{2}t^2N^2$.
5. En déduire l'expression de la matrice $A = \exp(tB)$ en fonction de t.
6. En déduire les expressions des fonctions $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$ et $t \mapsto z(t)$ lorsque $x(0) = k_1$, $y(0) = k_2$ et $z(0) = k_3$.
   *Déterminer les fonctions $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$ et $t \mapsto z(t)$ lorsque $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ et $k_3 = 2$.

Solution : Pour un réel fixé α, considérons le système différentiel linéaire sans second membre $(\mathcal{S})$ donné par

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) &=& \alpha\, x(t) + 2\, y(t) + 4z(t) \\ y'(t) &=& \alpha\, y(t) + 3z(t) \\ z'(t) &=& \alpha\, z(t) \end{array} \right.$$

où x, y et z sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit $t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

1. La forme matricielle équivalente du système $(\mathcal{S})$:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 4 \\ 0 & \alpha & 3 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

   d'où la forme matricielle $X'(t) = BX(t)$ où $B = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 4 \\ 0 & \alpha & 3 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$. La matrice B soit inversible si et seulement si $\det(B) \neq 0$, or $\det(B) = \alpha^3$; donc si $\alpha \neq 0$, alors B serait inversible.
   Ces matrices sont appelées des matrices trinagulaires supérieures puisque sa partie traingulaire inférieure est nulle.
2. Calculons les puissance B^2 et B^3 :

$$\begin{aligned} B^2 &= B \times B = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 4 \\ 0 & \alpha & 3 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 4 \\ 0 & \alpha & 3 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 4\alpha & 8\alpha + 6 \\ 0 & \alpha^2 & 6\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} \\ B^3 &= B \times B^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 4 \\ 0 & \alpha & 3 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^2 & 4\alpha & 8\alpha + 6 \\ 0 & \alpha^2 & 6\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^3 & 6\alpha^2 & 12\alpha^2 + 18\alpha \\ 0 & \alpha^3 & 9\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice B est nilpotente d'indice de nilpotence $p=3$ si B^k est nulle pour tout $k \geq 3$, pour que B soit nilpotente d'indice de nilpotence $p=3$, il faut d'abord que

$$B^3 = \begin{pmatrix} \alpha^3 & 6\alpha^2 & 12\alpha^2+18\alpha \\ 0 & \alpha^3 & 9\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

soit pour $\alpha = 0$. Donc si $\alpha = 0$, alors B serait nilpotente d'indice de nilpotence $p=3$.

3. La matrice B peut s'écrire sous la forme $\alpha I_3 + N$, en effet,

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 4 \\ 0 & \alpha & 3 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d'où $B = \alpha I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Maintenant, vérifions que la matrice N est nilpotente : en effet,

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc la matrice N est nilpotente d'indice de nilpotence $p = 3 = \inf\{k \in \mathbb{N} \,/\, N^k \quad \text{est nulle}\}$, c'est à dire que B^k est nulle pour tout $k \geq 3$.

4. Soit $B = \alpha I_3 + N$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $t\,B = \alpha\, t I_3 + t\,N$ et comme $N\,I_3 = I_3\,N$ alors

$$\exp(tB) = \exp(\alpha\, tI_3 + t\,N) = \exp(\alpha\, tI_3)\exp(t\,N) = \exp(\alpha\, t)\, I_3\, \exp(t\,N)$$

comme $\exp(t\,N)$ se développe sous la forme suivante :

$$\exp(t\,N) = I_3 + \sum_{k\geq 1} \frac{t^k}{k!} N^k = I_3 + \sum_{k=1}^{2} \frac{t^k}{k!} N^k + \sum_{k\geq 3} \frac{t^k}{k!} N^k$$

alors $\exp(t\,N) = I_3 + \dfrac{t}{1!} N + \dfrac{t^2}{2!} N^2$ car $\displaystyle\sum_{k\geq 3} \frac{t^k}{k!} N^k$ est la matrice nulle car $N^k = O$ pour tout $k \geq 3$, finalement, on obtient $\exp(tB) = \exp(\alpha t)\left(I_3 + tN + \frac{1}{2}t^2N^2\right)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

5. Calculons les matrices $Q = I_3 + tN + \frac{1}{2}t^2N^2$ et $A = \exp(tB)$ en fonction de t : en effet,

$$Q \;=\; I_3 + tN + \frac{1}{2}t^2N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2t & 4t \\ 0 & 0 & 3t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3\,t^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2t & 4t+3t^2 \\ 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ensuite

$$A = \exp(tB) = e^{\alpha\, t}\, I_3\, \exp(t\,N) = \begin{pmatrix} e^{\alpha\, t} & 2te^{\alpha\, t} & (4t+3t^2)e^{\alpha\, t} \\ 0 & e^{\alpha\, t} & 3te^{\alpha\, t} \\ 0 & 0 & e^{\alpha\, t} \end{pmatrix}$$

6. Le système $(\mathcal{S})$ est équivalent au système $X'(t)B\,X(t)$ alors la solution $X(t)$ s'écrit formelement $X(t) = \exp(tB)\,X(0)$ où $X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$.

   On déduit donc la solution

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha\,t} & 2te^{\alpha\,t} & (4t+3t^2)e^{\alpha\,t} \\ 0 & e^{\alpha\,t} & 3te^{\alpha\,t} \\ 0 & 0 & e^{\alpha\,t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

   soit la solution générale donnée par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & e^{\alpha\,t}(k_1 + 2k_2\,t + k_3(4t+3t^2)) \\ y(t) & = & e^{\alpha\,t}(k_2 + 3k_3\,t) \\ z(t) & = & k_3 e^{\alpha\,t} \end{array} \right.$$

   en particulier, pour $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ et $k_3 = 2$, il vient

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & (6\,t^2 + 6\,t + 1)e^{\alpha\,t} \\ y(t) & = & (6\,t - 1)e^{\alpha\,t} \\ z(t) & = & 2e^{\alpha\,t} \end{array} \right.$$

$\square$